SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Davide Guidetti

EQUAZIONI PARABOLICHE ASTRATTE CON APPLICAZIONE A DOMINI CILINDRICI NELLE VARIABILI SPAZIALI

27 maggio 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Summary. We introduce an abstract maximal regularity result concerning a certain initial-mixed boundary value problem. We apply this result to parabolic or degenerate parabolic problems in cylindrical domains with respect to space variables.

Riassunto. Presentiamo un risultato astratto di regolarità massimale relativo ad un certo problema misto al contorno. Applichiamo tale risultato a problemi parabolici o parabolici degeneri in domini cilindrici rispetto alle variabili spaziali.

In questo seminario presenterò alcuni risultati (vedi [4]), ottenuti in collaborazione con Alfredo Lorenzi dell'Università di Milano, relativi a una certa equazione astratta di tipo parabolico. Tali risultati sono applicabili a problemi al contorno misti di tipo parabolico in domini spaziali cilindrici, che presentano dunque delle frontiere non regolari, e anche a certi problemi di tipo parabolico degenere di carattere più generale.

Il problema che consideriamo è il seguente:

$$\begin{cases} D_t u(t,x) = a(x) D_x^2 u(t,x) + \mathcal{A}(x) u(t,x) + f(t,x), \\ \qquad (t,x) \in [0,T] \times [0,L], \\ D_x^j u(0,t) = 0, D_x^j u(L,t) = 0, t \in [0,T], \\ u(0,x) = u_0(x), x \in [0,L], \end{cases} \qquad (P_j)$$

con $j \in \{0,1\}$, sotto le condizioni seguenti:

(H1) $T \in \mathbf{R}^+$, $L \in \mathbf{R}^+$, $a \in C^\alpha([0,L])$ $(\alpha \in]0,1[)$, $a(x) > 0$ $\forall x \in [0,L]$;

(H2) sono dati due spazi di Banach complessi X e Y, con Y immerso con continuità in X, tali che $\mathcal{A} \in C^\alpha([0,L]; \mathcal{L}(Y,X))$; inoltre, per ogni $x \in [0,L]$ $\mathcal{A}(x)$ è un operatore settoriale nello spazio X;

Dire che $\mathcal{A}(x)$ è un operatore settoriale in X significa dire che per qualche $\epsilon > 0$ il risolvente $\rho(\mathcal{A}(x))$ di $\mathcal{A}(x)$ contiene $\{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : |Arg(z)| < \frac{\pi}{2} + \epsilon\}$ ed esiste $M > 0$ tale che in questa regione vale

$$\|(z - \mathcal{A}(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M|z|^{-1}.$$

Il nostro obiettivo è trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché il problema (P_j) possieda un'unica soluzione u nella classe $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T] \times [0,L]; X) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L]; Y)$. Le classi $C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}$ e $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$ sono ben note nell'ambito delle equazioni paraboliche (si veda, ad esempio, [6]). Se $\alpha \in]0,1[$ e Z è uno spazio di Banach, poniamo

$$C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L]; Z) := C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T]; C([0,L]; Z)) \cap B([0,T]; C^\alpha(I; Z)),$$

ove $B([0,T]; ...)$ indica la classe delle funzioni limitate di dominio $[0,T]$. Invece,

$$\begin{gathered} C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T] \times [0,L]; Z) := \\ = \{u \in C^1([0,T]; C([0,L]; Z)) \cap C([0,T]; C^2([0,L]; Z)) : \\ D_t u \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L]; Z), D_x^2 u \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L]; Z)\}. \end{gathered}$$

Il risultato che vogliamo illustrare è il seguente

Teorema 1 *Sotto le ipotesi (H1) e (H2), le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché il problema* (P_j) *possieda una e una sola soluzione nella classe* $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T]\times[0,L];X)\cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T]\times[0,L];Y)$*:*

(I) $f\in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T]\times[0,L];X)$*;*

(II) $u_0\in C^{2+\alpha}([0,L];X)\cap C^{\alpha}([0,L];Y)$*;*

(III) $D_x^j u_0(0)=0,\ D_x^j u_0(L)=0$*;*

(IV) l'applicazione $a(.)u_0''+\mathcal{A}(.)u_0+f(0,.)$ *è limitata a valori nello spazio di interpolazione* $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}$*;*

(V) se $j=0$, $a(0)u_0''(0)+f(0,0)=a(L)u_0''(L)+f(0,L)=0$ *e* $f(.,0)$ *and* $f(.,L)$ *(con dominio* $[0,T]$*) sono limitate a valori in* $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}$.

Ricordiamo che, se $\theta\in]0,1[$, $(X,Y)_{\theta,\infty}$ si può definire come

$$\begin{aligned}\{x\in X:\ &\text{esistono } C>0 \text{ e } \forall t\in\mathbf{R}^+ y_t\in Y \text{ soddisfacenti}\\ &\|x-y_t\|_X\le Ct^{\theta},\ \|y_t\|_Y\le Ct^{\theta-1}\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Intuitivamente, dire che $x\in(X,Y)_{\theta,\infty}$ significa affermare che è possibile approssimare opportunamente x con elementi di Y ($\|x-y_t\|_X\le Ct^{\theta}$), in modo tale che l'appossimante y_t "diverge in Y" con velocità controllata ($\|y_t\|_Y\le Ct^{\theta-1}$). (X,Y) è uno spazio di Banach contenente Y e contenuto in X (con immersioni continue) se si prende come norma l'estremo inferiore delle costanti $C>0$ in (1). In molti casi concreti sono note delle caratterizzazioni esplicite di $(X,Y)_{\theta,\infty}$.

Il programma che ci proponiamo ora di svolgere è il seguente:

1) Dimostreremo la necessità delle condizioni (I)-(V) per ottenere la regolarità desiderata della soluzione;

2) accenneremo brevemente alla dimostrazione della sufficienza delle condizioni (I)-(V). La dimostrazione completa di quest'ultimo punto, in particolare nel caso $j=0$, è troppo lunga per essere presentata in questo seminario;

3) presenteremo un'applicazione a problemi misti al contorno del teorema 1.

Verifichiamo ora che le condizioni (I)-(V) sono necessarie per ottenere una soluzione $u\in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T]\times[0,L];X)\cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T]\times[0,L];Y)$.

Le condizioni (I)-(III) sono abbastanza ovvie.

Verifichiamo che, nel caso $j=0$, deve valere

$$a(0)u_0''(0)+f(0,0)=a(L)u_0''(L)+f(0,L)=0.$$

Infatti, da $u(t,0)=u(t,L)=0\ \forall t\in[0,T]$ segue $D_tu(t,0)=D_tu(t,L)=0$ $\forall t\in[0,T]$. Dunque, per $x=0$,

$$a(0)D_x^2u(0,0)+f(0,0)=D_tu(0,0)-\mathcal{A}(0)u(0,0)=0.$$

Nello stesso modo si può verificare che deve valere

$$a(L)D_x^2u(0,L) + f(0,L) = 0.$$

Veniamo ora a (IV) e alla seconda condizione in (V). Queste sono conseguenza del seguente lemma, generalizzazione di alcuni risultati dovuti a P. Grisvard (vedi [2]):

Lemma 1 *Siano X e Y spazi di Banach, con $Y \subseteq X$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in]0,1[$, $\beta \in]0,1[$, $T \in \mathbf{R}^+$. Allora:*

(I) se $u \in C^{m+\alpha}([0,T];X) \cap B([0,T];Y)$, per $k \in \{1,...,m\}$ $u^{(k)} \in B([0,T];(X,Y)_{1-\frac{k}{m+\alpha},\infty})$;

(II) se $u \in C^{m+\alpha}([0,T];X) \cap C^{\beta}([0,T];Y)$, per $k \in \{1,...,m\}$ $u^{(k)} \in B([0,T];(X,Y)_{1-\frac{k-\beta}{m+\alpha-\beta},\infty})$.

Mostriamo ora come dal lemma 1 segue la necessità della condizione (IV) nel teorema 1.

Sia $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T] \times [0,L];X) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L];X)$. Allora $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X)) \cap C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];Y))$. Del lemma 1 segue che $D_tu \in B([0,T];(C([0,L];X),C([0,L];Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty})$.

Non è difficile far vedere che

$$(C([0,L];X),C([0,L];Y))_{\frac{\alpha}{2},\infty} = C([0,L];X) \cap B([0,L];(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}).$$

Da ciò segue immediatamente che $D_tu \in B([0,T] \times [0,L];(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty})$. D'altra parte,

$$a(.)u_0'' + \mathcal{A}(.)u_0 + f(0,.) = D_tu(0,.),$$

da cui (IV).

Verifichiamo, infine, che, nel caso $j = 0$, è necessario richiedere che $f(.,0) \in B([0,T];(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty})$. Infatti, abbiamo già osservato che in questo caso $D_tu(t,0) = 0$ $\forall t \in [0,T]$. Segue che, per $x = 0$,

$$a(0)D_x^2u(t,0) + f(t,0) = 0$$

$\forall t \in [0,T]$ oppure, equivalentemente, che

$$f(t,0) = -a(0)D_x^2u(t,0) \qquad \forall t \in [0,T].$$

Allora, per ottenere quanto affermato, basta far vedere che, se $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X)) \cap C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];Y))$, allora $D_x^2u \in B([0,T] \times [0,L];(X,$

$Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty})$. Questo può essere verificato utilizzando ancora il lemma 1. Infatti, $u \in B([0,T]; C^{2+\alpha}([0,L];X)) \cap B([0,T]; C^{\alpha}([0,L];Y))$. Quindi per ogni $t \in [0,T]$, $u(t,.) \in C^{2+\alpha}([0,L];X) \cap C^{\alpha}([0,L];Y)$. Dal lemma 1 segue che per ogni $t \in [0,T]$ $D_x^2 u(t,.) \in B([0,L]; (X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty})$. Da ciò segue la conclusione.

Veniamo ora al punto 2). Ci limitiamo al caso in cui a e $\mathcal{A}$ sono funzioni costanti (a valori, rispettivamente, in $\mathbf{R}^+$ e $\mathcal{L}(Y,X)$) e $u_0 \equiv 0$. In questo caso particolare, vogliamo risolvere il problema

$$\begin{cases} D_t u(t,x) = a D_x^2 u(t,x) + \mathcal{A} u(t,x) + f(t,x), \\ \qquad (t,x) \in [0,T] \times [0,L], \\ D_x^j u(0,t) = 0, D_x^j u(L,t) = 0, t \in [0,T], \\ \qquad u(0,x) = 0, x \in [0,L] \end{cases} \tag{2}$$

sotto le condizioni

(K1) $f \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L];X)$;

(K2) l'applicazione $f(0,.)$ è limitata a valori nello spazio di interpolazione $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}$;

(K3) se $j = 0$, $f(0,0) = f(0,L) = 0$ e $f(.,0)$ and $f(.,L)$ (con dominio $[0,T]$) sono limitate a valori in $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}$.

Definiamo

$$\begin{cases} D(A) := C([0,L];Y), \\ (Au)(x) := \mathcal{A} u(x), \qquad x \in [0,L], \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} D(B) := \{u \in C^2([0,L];X) : D_x^j u(0) = D_x^j u(L) = 0\}, \\ (Bu)(x) := a D_x^2 u(x), \qquad\qquad x \in [0,L]. \end{cases} \tag{4}$$

Il problema (2) può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} D_t u(t) = Au(t) + Bu(t) + f(t), \\ \qquad t \in [0,T], \\ \qquad u(0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

con la solita convenzione di identificare funzioni della variabile (t,x) con corrispondenti funzioni della variabile t a valori in spazi funzionali nella variabile x. Per risultati ormai classici dovuti a Da Prato Grisvard (vedi [1]), con alcune osservazioni più recenti dovute a R. Labbas (vedi [5]), si può dire che esiste un operatore settoriale P estensione della somma $A+B$. Se indichiamo con $\{e^{tP} : t \geq 0\}$ il semigruppo analitico generato da P nella spazio $C([0,L];X)$, il problema (5) ammette la soluzione "mild"

$$u(t) := \int_0^t e^{(t-s)P} f(s)ds. \tag{6}$$

Usando il lemma 1, si può provare che vale l'identità

$$\begin{aligned} &C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T]\times[0,L];X) \\ &= C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X)) \cap B([0,T];C^{2+\alpha}([0,L];X)). \end{aligned} \tag{7}$$

La formula (7) permette di considerare separatamente le regolarità di u nella variabile t e nella variabile x. Sotto quali condizioni si può dire che $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X))$? Vale il seguente teorema, dovuto a E. Sinestrari (vedi [7]):

Teorema 2 *Siano P un operatore settoriale nello spazio di Banach Z, $\beta \in]0,1[$, $f \in C([0,T];Z)$. Allora le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché la funzione u definita in (6) appartenga a $C^{1+\beta}([0,T];Z) \cap C^{\beta}([0,T];D(P))$:*

(I) $f \in C^{\beta}([0,T];Z)$;

(II) $f(0) \in (X, D(P))_{\beta,\infty}$.

Le condizioni (I) e (II) del teorema diventano nel nostro caso:

(α) $f \in C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X))$;

(β) $f(0,.) \in (C([0,L];X), D(P))_{\frac{\alpha}{2},\infty}$.

In base a un teorema dovuto a R. Labbas (vedi [5]), $(C([0,L];X), D(P))_{\frac{\alpha}{2},\infty}$ coincide con $(C([0,L];X), D(A))_{\frac{\alpha}{2},\infty} \cap (C([0,L];X), D(B))_{\frac{\alpha}{2},\infty}$. Abbiamo già osservato che

$$(C([0,L];X), D(A))_{\frac{\alpha}{2},\infty} = C([0,L];X) \cap B([0,L];(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}), \tag{8}$$

mentre

$$(C([0,L];X), D(B))_{\frac{\alpha}{2},\infty} = \begin{cases} \{g \in C^{\alpha}([0,L];X) : g(0) = g(L) = 0\} \\ \qquad \text{se } j = 0, \\ C^{\alpha}([0,L];X) \\ \qquad \text{se } j = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Applicando il teorema 2, possiamo allora effettivamente concludere che, sotto le condizioni (K1)-(K3), la soluzione "mild" appartiene a $C^{1+\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];X)) \cap C^{\frac{\alpha}{2}}([0,T];C([0,L];Y))$.

Per quanto riguarda la dimostrazione del fatto che $u \in B([0,T];C^{2+\alpha}([0,L];X)) \cap B([0,T];C^{\alpha}([0,L];Y))$, qui ci limitiamo a osservare che il caso $j = 1$

è più semplice. Ciò è dovuto al fatto che in questo caso, in base a (9), lo spazio di interpolazione $(C([0,L];X), D(B))_{\frac{\alpha}{2},\infty}$ coincide con l'intero spazio $C^{\alpha}([0,L];X)$. Questo non vale nel caso $j=0$ e qui è necessaria l'ipotesi che $f(.,0)$ e $f(.,L)$ siano limitate a valori in $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2},\infty}$.

Presentiamo infine un'applicazione del teorema 1.

Siano Ω un aperto limitato in $\mathbf{R}^n$, con frontiera di classe C^{2m} $(m \in \mathbf{N})$, $L \in \mathbf{R}^+$, per $x \in [0,L]$ e $y \in \overline{\Omega}$,

$$A(x,y,D_y) := \sum_{|\gamma| \leq 2m} a_\gamma(x,y) D_y^\gamma. \tag{10}$$

Vogliamo studiare, dati $T \in \mathbf{R}^+$ e $j \in \{0,1\}$, il seguente problema misto:

$$\begin{cases} D_t u(t,x,y) = a(x) D_x^2 u(t,x,y) + A(x,y,D_y) u(t,x,y) + f(t,x,y), \\ (t,x,y) \in [0,T] \times [0,L] \times \Omega, \\ D_x^j u(t,0,y) = D_t^j u(t,L,y) = 0, \\ (t,y) \in [0,T] \times \Omega, \\ D_y^\gamma u(t,x,y) = 0, \\ |\gamma| \leq m-1, t \in [0,T], x \in [0,L], y \in \partial\Omega, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \\ x \in [0,L], y \in \Omega \end{cases} \tag{11}$$

sotto le ipotesi seguenti:

(a) i coefficienti a_γ dell'operatore $A(x,y,D_y)$ sono di classe $C^{\alpha}([0,L];C(\overline{\Omega}))$, per un certo $\alpha \in]0,1[$;

(b) $A(x,y,D_y)$ è , per ogni $x \in [0,L]$, fortemente ellittico in Ω; ciò significa che esiste $\nu > 0$ tale che $\forall x \in [0,L], y \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^n$,

$$-Re(\sum_{|\gamma|=2m} a_\gamma(x,y))(i\xi)^\gamma \geq \nu |\xi|^{2m};$$

(c) $a \in C^{\alpha}([0,L])$, $a(x) > 0$, $\forall x \in [0,L]$.

Sia $p \in]1,+\infty[$. Vogliamo dare condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e l'unicità di una soluzione $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T] \times [0,L]; L^p(\Omega)) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T] \times [0,L]; W^{2m,p}(\Omega))$.

Osserviamo che, se $m=1$, il problema (11) è parabolico, con le variabili spaziali (x,y) nel cilindro $[0,L] \times \Omega$. Se invece, $m \neq 1$, il problema è parabolico degenere.

Cerchiamo adesso di applicare il teorema 1.

Poniamo

$$X := L^p(\Omega), \tag{12}$$

$$Y := W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega). \tag{13}$$

Si osservi che la condizione $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ implica che tutte le derivate di ordine non superiore a $m-1$ di v ammettono traccia su $\partial\Omega$ e tale traccia è nulla. Inoltre, dato $\theta \in]0,1[$, si conoscono delle caratterizzazioni precise degli spazi di interpolazione $(X,Y)_{\theta,\infty}$ (vedi, ad esempio, [3]). Nel caso $2m\theta - \frac{1}{p} \notin \{0,...,m-1\}$, si ha

$$(X,Y)_{\theta,\infty} = B^{2m\theta}_{p,\infty,D}(\Omega) =$$
$$\{g \in B^{2m\theta}_{p,\infty}(\Omega) : D^\gamma g_{|\partial\Omega} = 0 \ \ \forall \gamma \in \mathbf{N}_0^n \text{ con } |\gamma| \leq \min\{m-1, 2m\theta - \tfrac{1}{p}\}\}. \tag{14}$$

Poniamo adesso, per $x \in [0,L]$,

$$\begin{cases} A(x) : Y \to X, \\ A(x)u := A(x,.,D_y)u. \end{cases} \tag{15}$$

É ben noto (vedi [8]) che esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in [0,L]$ l'operatore $A(x) + \lambda$ è settoriale in X. Si può allora verificare facilmente (prendendo come nuova funzione incognita $e^{\lambda t}u$ al posto di u) che le conclusioni del teorema 1sono ancora valide. Ricaviamo allora il seguente

Teorema 3 *Consideriamo il problema (11) sotto le ipotesi (a)-(c). Siano $p \in]1,+\infty[$, $\alpha \in]0,1[$ tali che $m\alpha - \frac{1}{p} \notin \{0,...,m-1\}$, $j \in \{0,1\}$. Allora le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché tale problema ammetta un'unica soluzione u in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([0,T]\times[0,L]; L^p(\Omega)) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T]\times[0,L]; W^{2m,p}(\Omega))$:*

(I) $f \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0,T]\times[0,L]; L^p(\Omega))$;

(II) $u_0 \in C^{2+\alpha}([0,L]; L^p(\Omega)) \cap C^\alpha([0,L]; W^{2m,p}(\Omega))$;

(III) $D_y^\gamma u_0(x,y) = 0 \ \forall \gamma \in \mathbf{N}_0^n$ con $|\gamma| \leq m-1$, $\forall x \in [0,L]$;

(IV) $D_x^j u_0(0,y) = D_x^j u_0(L,y) = 0 \ \forall y \in \Omega$;

(V) $x \to a(x)D_x^2 u_0(x,.) + A(x,.,D_y)u_0(x,.) + f(0,x,.) \in B([0,L]; B^{m\alpha}_{p,\infty,D}(\Omega)$;

(VI) nel caso $j = 0 \ \forall y \in \Omega$

$$a(0)D_x^2 u_0(0,y) + f(0,0,y) = a(L)D_x^2 u_0(L,y) + f(0,L,y)$$

e le applicazioni $t \to f(t,0,.)$ e $t \to f(t,L,.)$ sono limitate su $[0,T]$ a valori in $B^{m\alpha}_{p,\infty,D}(\Omega)$.

Concludiamo segnalando che nel lavoro [4] abbiamo ottenuto la seguente generalizzazione del teorema 1:

Teorema 4 *Consideriamo il problema*

$$\left\{\begin{array}{c} D_t u(t,x) = (-1)^{m-1} a(x) D_x^{2m} u(t,x) + \mathcal{A}(x) u(t,x) + f(t,x), \\ (t,x) \in [0,T] \times [0,L], \\ D_x^{j_1} u(t,0) = \ldots = D_x^{j_m} u(t,0) = D_x^{k_1} u(t,L) = \ldots = D_x^{k_m} u(t,L) = 0, \\ t \in [0,T], \\ u(0,x) = u_0(x), x \in [0,L], \end{array}\right. \qquad (P)$$

sotto le condizioni seguenti:

(H1) T e L sono elementi di $\mathbf{R}^+$, $\alpha \in]0,1[$,$m \in \mathbf{N}$, $a \in C^\alpha([0,L]$, $a(x) > 0$ $\forall x \in [0,L]$;

(H2) X e Y sono spazi di Banach complessi, con Y immerso con continuità in X. Per ogni $x \in [0,L]$ $\mathcal{A}(x) \in \mathcal{L}(Y,X)$, $x \to \mathcal{A}(x)$ appartiene a $C^\alpha([0,L];\mathcal{L}(Y,X))$;

(H3) $\forall x \in [0,L]$ $\mathcal{A}(x)$ è un operatore settoriale in X;

(H4) $0 \le j_1 < \ldots < j_m \le 2m-1$, $0 \le k_1 < \ldots < k_m \le 2m-1$.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\delta_0 = \left\{\begin{array}{lll} 1 & se & j_1 = 0, \\ 0 & se & j_1 \ge 1, \end{array}\right. \qquad (16)$$

$$\delta_1 = \left\{\begin{array}{lll} 1 & se & k_1 = 0, \\ 0 & se & k_1 \ge 1. \end{array}\right. \qquad (17)$$

Allora le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché il problema (P) possieda un'unica soluzione u appartenente a $C^{1+\frac{\alpha}{2m},2m+\alpha}([0,T]\times[0,L];X) \cap C^{\frac{\alpha}{2m},\alpha}([0,T]\times[0,L];Y)$:

(I) $f \in C^{\frac{\alpha}{2m},\alpha}([0,T]\times[0,L];X)$;

(II) $u_0 \in C^{2m+\alpha}([0,L];X) \cap C^\alpha([0,L];Y)$;

(III) $\forall l \in \{1,\ldots,m\}$ $D_x^{j_l} u_0(0) = D_x^{k_l} u_0(L) = 0$;

(IV) l'applicazione $x \to (-1)^{m-1} a(x) u_0^{(2m)}(x) + \mathcal{A}(x) u_0(x) + f(0,x)$ è limitata a valori in $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2m},\infty}$;

(V)

$$\delta_0((-1)^{m-1} a(0) u_0^{(2m)}(0) + f(0,0)) = \delta_1((-1)^{m-1} a(L) u_0^{(2m)}(L) + f(0,L)) = 0;$$

(VI) $\delta_0 f(.,0)$ e $\delta_1 f(.,L)$ (co, dominio $[0,T]$) sono limitate a valori in $(X,Y)_{\frac{\alpha}{2m},\infty}$.

Bibliografia

[1] G. Da Prato, P. Grisvard, "Sommes d'Opérateurs linéaires et equations différentielles opérationells", J. Math. Pures et Appl. 54 (1975), 301-387.

[2] P. Grisvard, "Identités entre espaces de traces", Math. Scand. 13 (1963), 70-74.

[3] D. Guidetti, "On interpolation with boundary conditions", Math. Zeit. 207 (1991), 439-460;

[4] D. Guidetti, A. Lorenzi, "Abstract parabolic equations with applications to problems in cylindrical space domains", in preparazione.

[5] R. Labbas, "Some results on the sum of linear operators with nondense domain", Ann. Mat. Pura Appl. 154 (1989), 91-97.

[6] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monographs, AMS (1968).

[7] E. Sinestrari, "On the abstract Cauchy problem in spaces of continuous functions", J. Math. Anal.-Appl. 107 (1985), 16-66.

[8] H. Tanabe, *Equations of evolution*, Pitman (1979).